

## ИНТЕНСИВНОСТЬ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В УЛЬЯХ

А.И. Гакашев, Е.Л. Тарунин

*Пермский государственный университет, Пермь, 614990, Россия*

Необходимость рассмотрения тепловой конвекции в пчелиных ульях обусловлена ее влиянием на выживаемость пчел в зимнее время. Конвекция в ульях происходит в сложной геометрии и сопровождается многими явлениями, учесть которые в полном объеме очень сложно. В данной работе выполнено подробное численное исследование тепловой конвекции с учетом теплового взаимодействия между рамками улья и с перебором геометрических параметров.

## INTENSITY OF THERMAL CONVECTION IN BEEHIVES

A.I. Gakashev and E.L. Tarunin

*Perm State University, Perm, 614990, Russia*

The necessity of considering thermal convection in beehives is motivated by its influence on the survival of bees during winter months. Convection taking place in beehives develops in a complex fashion because of their complicated geometry and is accompanied by many phenomena, which cannot be taken properly into account. In this paper, calculations of thermal convection in beehives are carried out with consideration of the inter-frames inner convection current circulation for different geometric parameters.

### 1. Введение

Роль тепловой конвекции в пчелиных ульях неоднократно обсуждалась на страницах журнала «Пчеловодство» [1]. В частности, предполагалось, что конвекция существенно определяет условия выживаемости пчел в ульях, которые не переносятся в зимнее время в отапливаемые помещения. Однако, до работы [2], не было предпринято ни одной серьезной попытки выполнить расчет тепловой конвекции в ульях. Это обстоятельство не случайно. Дело в том, что конвекция в ульях происходит в сложной геометрии и сопровождается многими явлениями, учесть которые в полном объеме очень сложно. Достаточно сказать, что кроме тепла пчелы выделяют влагу, передвигаются по улью, съедают мед в сотах и взмахами крыльев организуют вентиляцию воздуха, если она недостаточна за счет открытых отверстий. Расчеты [2] показали значительное влияние тепловой конвекции на распределение температуры в улье. В этих расчетах согласно оценкам пчеловодов полагалось, что мощность тепловыделения клубком пчел  $Q$  изменяется в интервале от 2 до 5 Вт. Оценки мощности тепловыделения [3], выполненные с помощью решения простых теплопроводных задач, показали, что ближе всего к реальным значениям мощности тепловыделения является нижняя граница интервала, равная 2 Вт. В данной работе выполнено подробное численное исследование тепловой конвекции с учетом теплового взаимодействия между рамками улья и с перебором геометрических параметров и, кроме того, намечены контуры дальнейших исследований.

## 2. Постановка задачи

Пчелиный улей состоит из рамок, расположенных на небольшом расстоянии друг от друга [1, 4]. Рассмотрим вначале область в форме прямоугольного параллелепипеда, расположенную между двумя соседними рамками (Рис. 1).

Для исследования конвективного движения используем уравнения свободной конвекции в приближении Буссинеска с внутренними источниками тепла [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla\bar{v}) &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\bar{v} + g\beta T\gamma, \\ \operatorname{div} \bar{v} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)T &= \chi\Delta T + \frac{q}{\rho c}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\bar{v}$  – вектор скорости движения,  $\rho$  – плотность,  $T$  – температура,  $p$  – давление,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $q$  – мощность внутренних источников тепла на единицу объема,  $\chi = \frac{k}{\rho c}$  – коэффициент температуропроводности,  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $c$  – удельная теплоемкость.

Рассмотрим два варианта граничных условий на широких гранях ( $z = \pm d$ ):

I) отсутствие теплообмена  $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ ;

II) теплообмен с соседними межрамочными областями через перегородку, состоящую в общем случае из воска и меда.

Считаем, что на узких гранях теплообмен осуществляется по закону Ньютона:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha(T - T_0). \quad (2)$$

Обычно толщина ячейки с воздухом (улочка)  $D = 2d$  гораздо меньше размеров рамки. Например, в улье классической формы [4] размер рамки равен 450×300 мм, толщина улочки – 0,8 см, а число рамок изменяется от 10 до 15. Расчеты естественной

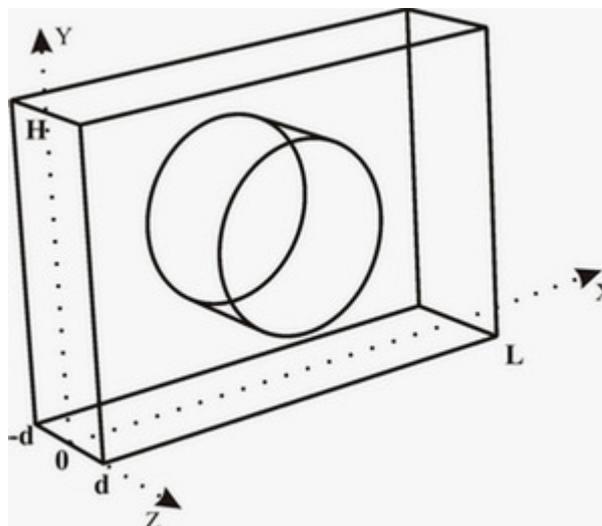


Рис. 1. Геометрия межрамочной области

конвекции выполним для 12-рамочного улья. При этом используем модель Хеле-Шоу с перебором величины  $D$  от 0,8 до 3 см (считаем, что расстояние между рамками равно 3,3 см).

Полагаем, что клубок пчел приближенно представляет собой шар, центр которого совпадает с центром улья. Рамки делят этот шар на слои цилиндрической формы с радиусом, зависящим от удаленности от центра пчелиного шара.

Распишем уравнения (1) в компонентах скорости, предполагая, что  $v_z = 0$ ,  $v_x = u$ ,  $v_y = v$ . Это предположение соответствует плоскому конвективному движению, используемому в модели Хеле-Шоу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v + g \beta T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \chi \Delta T + \frac{q}{\rho c}. \quad (5)$$

В этих уравнениях  $\Delta$  – оператор Лапласа, состоящий из частных производных второго порядка по трем пространственным координатам. Ниже, после учета зависимости скорости и температуры от поперечной координаты  $z$ , будем использовать оператор  $\tilde{\Delta}$ , состоящий из частных производных второго порядка по двум пространственным координатам.

В соответствии с моделью Хеле-Шоу [5] аппроксимируем зависимости компонент скорости  $u$ ,  $v$  от поперечной координаты  $z$  полиномом второй степени:

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}(x, y) \left( 1 - \frac{z^2}{d^2} \right), \\ v &= \tilde{v}(x, y) \left( 1 - \frac{z^2}{d^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

В этих уравнениях  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  – значения компонент скорости в середине ячейки ( $z = 0$ ). При описании течения в ячейке Хеле-Шоу иногда используется не максимальное значение скорости, а среднее, связанное с максимальным значением соотношением

$$\tilde{u} = \frac{3}{2} u_{cp}, \quad \tilde{v} = \frac{3}{2} v_{cp}. \quad (7)$$

Предположим, что температура и давление не зависят от поперечной координаты. Используя выражения (6), (7), интегрируем уравнения (3)–(5) поперек слоя. После интегрирования уравнения сводятся к виду (индекс для средних значений опускаем):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{6}{5} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \tilde{\Delta} u - \frac{3\nu}{d^2} u, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{6}{5} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \tilde{\Delta} v - \frac{3\nu}{d^2} v + g \beta T,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \chi \tilde{\Delta} T + \frac{q}{\rho c}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Для численного решения этой системы перейдем к функциям двухполевого метода – вихрю скорости и функции тока [6]:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = (\text{rot } \bar{\mathbf{v}})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\Delta \psi. \quad (11)$$

В переменных двухполевого метода уравнения (8), (10) принимают следующий вид (вид уравнения теплопроводности не меняется):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{6}{5} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \nu \Delta \varphi - \frac{3\nu}{d^2} \varphi + g \beta \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\Delta \psi = -\varphi.$$

В записи этих уравнений знак тильды опущен. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi|_r = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}|_r = 0, \\ k \frac{\partial T}{\partial n}|_r = -\alpha(T - T_0). \end{aligned} \quad (13)$$

В случае теплового взаимодействия между соседними улочками по широким граням, которое происходит через восковую перегородку, к уравнению (9) добавляется дополнительное слагаемое, получаемое из соотношения теплового баланса:

$$\Delta \hat{T}_k = \frac{k_g}{\rho c(l_0 + D)} \left( \frac{T_{k+1} - T_k}{l_0} + \frac{T_{k-1} - T_k}{l_0} \right) \Delta t, \quad (14)$$

где  $k_g$  – коэффициент теплопроводности воска,  $l_0$  – эффективная толщина перегородки между рамками,  $k$  – индекс номера улочки. Соотношение теплового баланса (14) является первым приближением к реальной ситуации. Заметим, что в реальной ситуации ячейки разделены не только воском, но и частично заполненными медом сотовыми ячейками. Учет этой ситуации планируется выполнить в дальнейшем.

Рассчитываемая плоская область изображена на рисунке 2.

Параметрами клубка пчел в межрамочном пространстве являются координаты центра  $(a, b)$  и радиус  $R_k$ . Значение радиуса зависит от положения рамки относительно центральной рамки. Только для центральной рамки радиус  $R_k$  равен радиусу клубка пчел. В настоящей работе расчеты выполнены для клубка пчел, расположенного в центре улья:  $a = 0,5L$ ,  $b = 0,5H$ .

В задаче используются следующие параметры воздуха при 20°C [7]: плотность  $\rho = 1,206$  кг/м<sup>3</sup>; теплоемкость  $c = 1007$  Дж/(кг·К); коэффициент теплопроводности

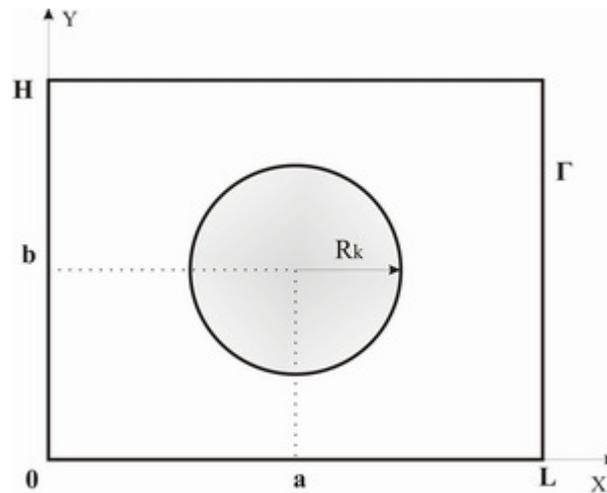


Рис. 2. Вид плоской области для межрамочного пространства

$k = 0,0253 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ; коэффициент температуропроводности  $\chi = 2,083 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ; кинематическая вязкость  $\nu = 1,49 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . Для воска коэффициент температуропроводности полагается равным  $\chi = 2,63 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ , коэффициент теплообмена –  $\alpha = 0,2$ . Геометрические параметры улья следующие: длина ячейки  $L = 0,45 \text{ м}$ ; высота ячейки  $H = 0,3 \text{ м}$ ; толщина ячейки  $D = 0,8 \div 3 \text{ см}$ . Предполагается, что клубок пчел шаровой формы с радиусом  $R = 12 \text{ см}$  выделяет тепло  $Q = 2 \text{ Вт}$ .

Используя значение  $Q$  и зная радиус клубка, получаем значение удельной мощности тепловыделения:

$$q = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4\pi R^3/3} = 276 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

### 3. Описание метода

Уравнения аппроксимируем на прямоугольной сетке с числом интервалов  $N_1$  вдоль оси  $Ox$  и числом интервалов  $N_2$  вдоль оси  $Oy$ :

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0..N_1, \quad y_j = j\Delta y, \quad j = 0..N_2.$$

Планируя использовать аппроксимацию против потока, выполним преобразования, позволяющие записать эту аппроксимацию в виде, удобном для сравнения с аппроксимацией центральными (симметричными, двухсторонними) разностями (в обозначениях А.А. Самарского [8]):

$$\varphi_t + \frac{6}{5} \left( \frac{u+|u|}{2} \varphi_x + \frac{u-|u|}{2} \varphi_x + \frac{v+|v|}{2} \varphi_y + \frac{v-|v|}{2} \varphi_y \right) = \nu (\varphi_{x\bar{x}} + \varphi_{y\bar{y}}) - \frac{3\nu}{d^2} \hat{\varphi} + g\beta T_x^0. \quad (15)$$

Сортировка слагаемых позволяет записать (15) в эквивалентном виде:

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\tau} + \frac{6}{5} (u\varphi_x^0 + v\varphi_y^0) = \left( \nu + \frac{3}{5} |u| h_1 \right) \varphi_{x\bar{x}} + \left( \nu + \frac{3}{5} |v| h_2 \right) \varphi_{y\bar{y}} - \frac{3\nu}{d^2} \varphi^{n+1} + g\beta T_x^0.$$

Отсюда видно, что схема с направленными разностями эквивалентна схеме с центральными разностями, у которой увеличены коэффициенты при вторых производных. В такой записи наглядно демонстрируется эффект «счетной вязкости» [6] схемы с направленными разностями.

Устойчивость выбранной схемы легко исследуется алгебраическим методом [6]. Итоговое ограничение по устойчивости шага по времени имеет вид:

$$\tau \leq \frac{h^2}{2(6 \max(\nu, \chi) + 0.6h_1 \max |u| + 0.6h_2 \max |v|)}.$$

Эволюционные уравнения для температуры и вихря решаем методом установления по явной схеме. Уравнение Пуассона для функции тока  $\psi$  на каждом шаге по времени решаем методом последовательной верхней релаксации [6].

На первом этапе метода находим значения температуры и вихря скорости во внутренних узлах на  $(n+1)$ -ом временном слое:

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{n+1} = & T_{i,j}^n - \Delta t \left( \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) + \\ & + \Delta t \left( \chi + 0,5 \Delta x \left| \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right| \right) \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \\ & + \Delta t \left[ \left( \chi + 0,5 \Delta y \left| \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right| \right) \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + \frac{q_{i,j}}{\rho c} \right], \\ \varphi_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{1 + 3\nu\Delta t/d^2} (\varphi_{i,j}^n - 1, 2\Delta t \left( \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) + \\ & + \Delta t \left( \nu + 0,6 \Delta x \left| \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right| \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \\ & + \Delta t \left[ \left( \nu + 0,6 \Delta y \left| \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right| \right) \frac{\varphi_{i,j+1}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + g\beta \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right]. \end{aligned}$$

На втором этапе решаем уравнение Пуассона методом последовательной верхней релаксации [6]:

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{s+1} = & \psi_{i,j}^s + \omega (\Omega - \psi_{i,j}^s), \\ \Omega = & (\psi_{i+1,j}^s + \psi_{i-1,j}^{s+1}) \frac{h_2^2}{2(h_1^2 + h_2^2)} + (\psi_{i,j+1}^s + \psi_{i,j-1}^{s+1}) \frac{h_1^2}{2(h_1^2 + h_2^2)} + \varphi_{i,j} \frac{h_1^2 h_2^2}{2(h_1^2 + h_2^2)}, \end{aligned}$$

где  $\omega$  – параметр релаксации  $\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \cos^2 \pi \left( \frac{h_1 + h_2}{2} \right)}}$ .

Итерации прекращаем при выполнении одного из условий: либо  $|\Omega - \psi_{i,j}^s| < \varepsilon_\psi \psi_m$ , ( $\varepsilon_\psi = 10^{-5}$ ), либо  $s > 3(N_1 + N_2)$ .

Счет ведём до установления стационарного режима по максимальному значению температуры и функции тока:

$$\frac{\left| \max_{i,j} T^{n+1} - \max_{i,j} T^n \right|}{\left| \max_{i,j} T^n \right|} + \frac{\left| \max_{i,j} \psi^{n+1} - \max_{i,j} \psi^n \right|}{\left| \max_{i,j} \psi^n \right|} \leq \varepsilon, \quad (\varepsilon = 10^{-6}).$$

#### 4. Результаты

Расчеты проводились при начальных условиях, соответствующих постоянной температуре внутри улья  $+2^{\circ}\text{C}$ , температуре снаружи улья  $-10^{\circ}\text{C}$ , мощность тепловыделения пчелами принималась равной 2 Вт.

Сначала обсудим результаты, соответствующие граничному условию отсутствия теплообмена на широких гранях (условие I).

Характер установления по максимуму температуры изображен на рисунке 3. Изолинии функции тока и температуры изображены на рисунке 4.

Как видно из рисунка 4, б, в верхней части ячейки формируется «тепловая шапка», центр максимума температуры смещен вверх относительно расположения центра клубка пчел. Максимальное значение температуры равно  $+8,6^{\circ}\text{C}$ , экстремальное значение функции тока равно  $1,13 \cdot 10^{-3}$ , максимальная скорость достигается в приграничных областях ячейки.

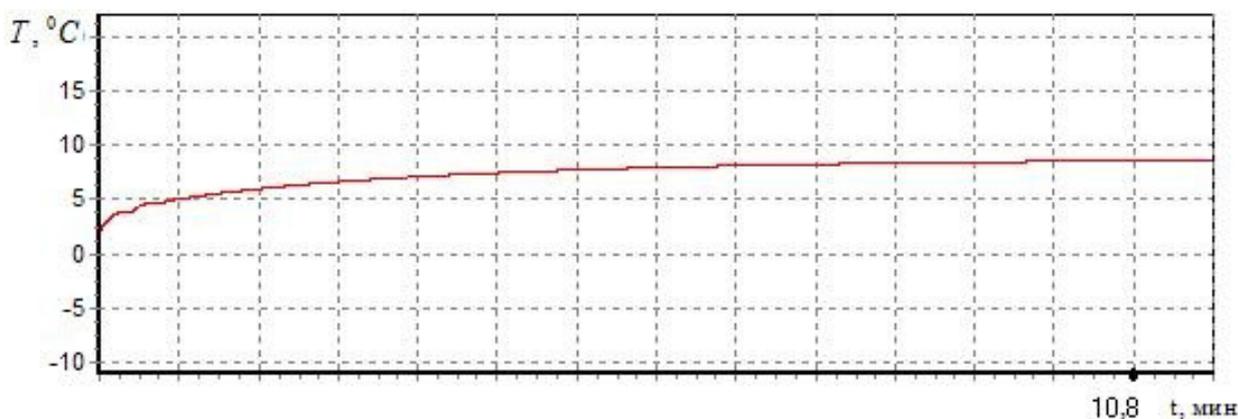


Рис. 3. Характер установления максимума температуры в средней ячейке

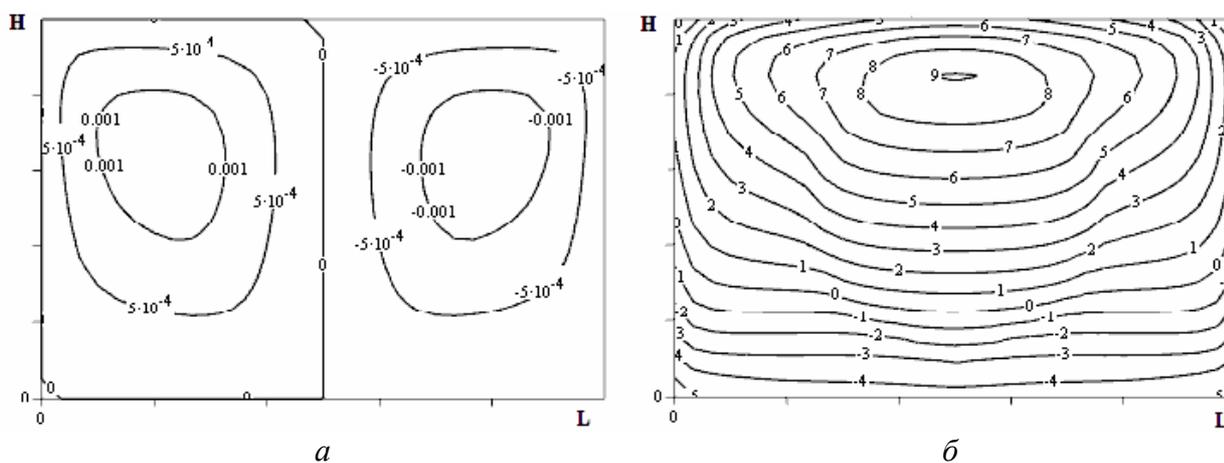


Рис. 4. Изолинии функции тока (а) и температуры (б) в средней ячейке

Обсудим результаты, учитывающие тепловые потоки между широкими гранями ячеек (условие II). Теплообмен крайних рамок считаем по формуле (2). При расчете по модели с тепловым взаимодействием между ячейками характер установления и картины изолиний функции тока и температуры имеют такую же структуру, как и при отсутствии теплового взаимодействия. Отличия в температуре и максимуме скорости между двумя вариантами граничных условий показаны на рисунках 5, 6.

Результаты, касающиеся конвекции при различных величинах ширины зазора  $D$ , приведены на рисунках 7, 8. Ширина зазора в пределах одной ячейки не постоянна. Ее наибольшее значение соответствует пустым сотовым ячейкам и отсутствию пчел. Расчеты выполнены для ширины зазора в интервале от 8 до 30 мм. Изменение этого геометрического параметра меняет максимальное значение температуры в улье на 35%, а максимальная скорость меняется в 2 раза.

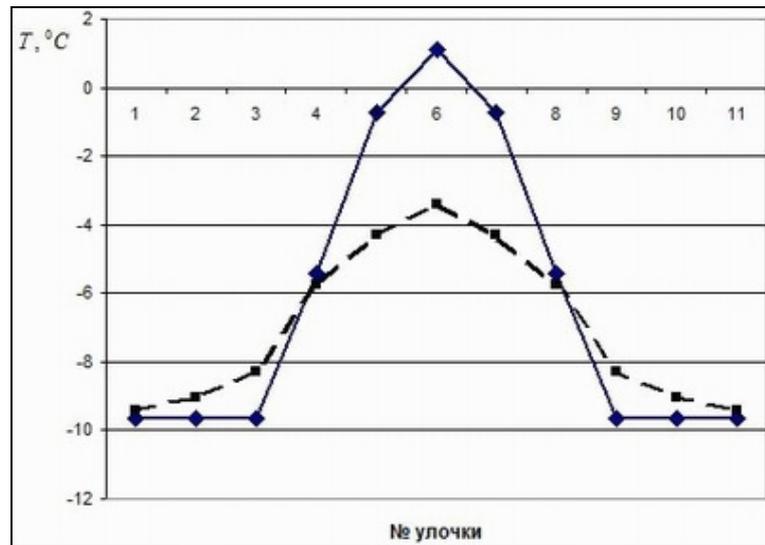


Рис. 5. Профили максимума температуры при различных граничных условиях (сплошная линия соответствует граничному условию I, штриховая – граничному условию II)

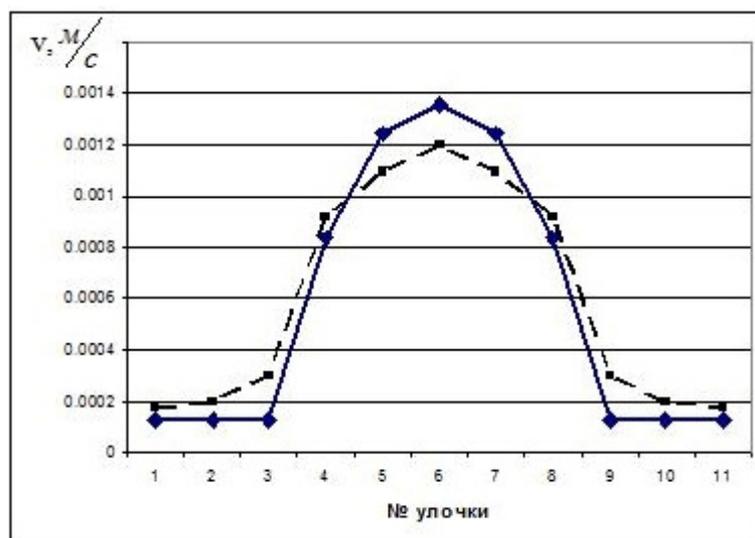


Рис. 6. Профили максимума скорости при различных граничных условиях (сплошная линия соответствует граничному условию I, штриховая – граничному условию II)

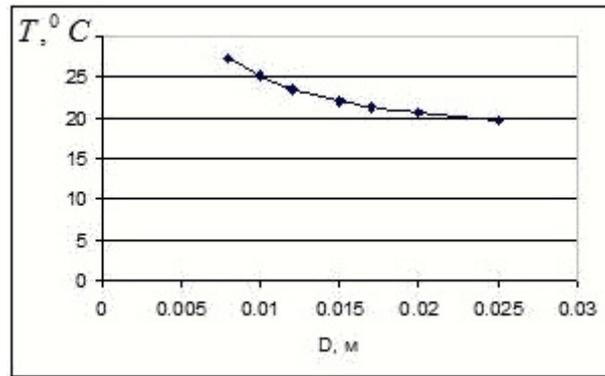


Рис. 7. Зависимость максимума температуры от ширины улочки

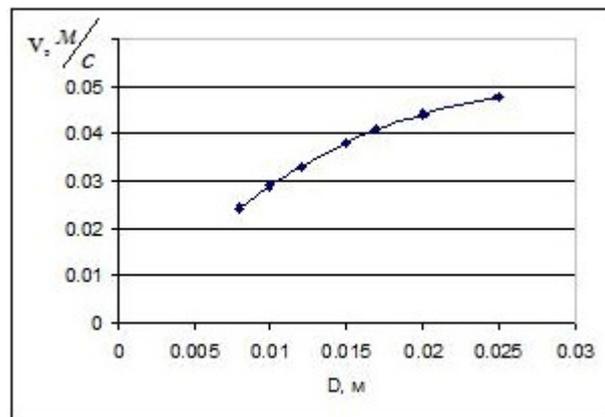


Рис. 8. Зависимость максимума скорости от ширины улочки

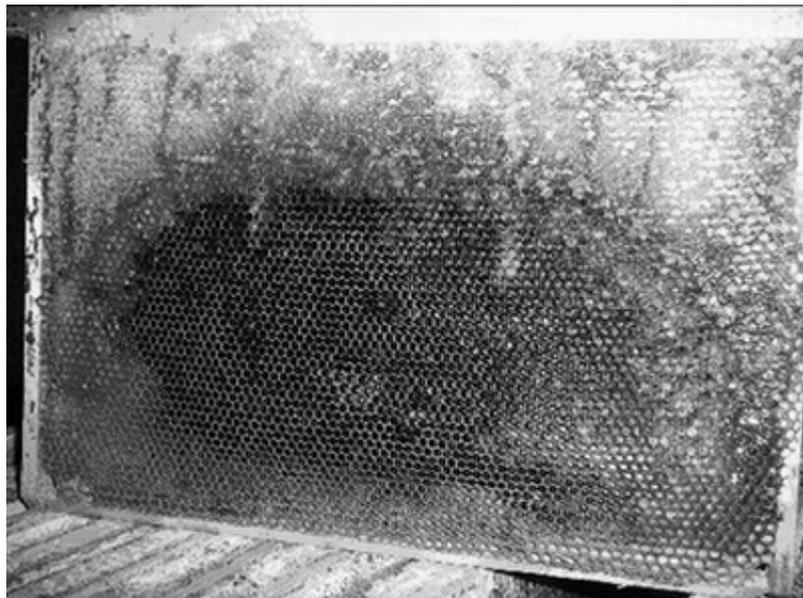


Рис. 9. Пчелиная рамка



Рис. 10. Вид сверху рамок с сотами в улье

Назовем эффекты, которые требуют дальнейших исследований.

1. Влага. Кроме тепла пчелы выделяют влагу, учет которой приведет к необходимости решать уравнение концентрации паров воды при весьма грубых оценках интенсивности выделения влаги.
2. Наличие отверстий для вылета пчел и проветривания улья. Принятие их во внимание усложнит расчет гидродинамики и теплообмена.
3. Теплоизоляция верхней части улья. Выполненные расчеты конвекции показывают, что в верхней части улья градиенты температуры значительно выше, чем в остальных частях, потому именно там выше теплопотери. Учесть эффект теплоизоляции не сложно, при решении соответствующей сопряженной задачи.
4. Передвижение пчел по улью (в поисках ячеек, заполненных медом) и проветривание улья своими силами (махание крыльями). Эти обстоятельства активно меняют гидродинамику воздушных потоков. Как учесть эти факты, пока не ясно.

О сложности геометрии воздушного пространства улья красноречиво свидетельствуют представленные фотографии (Рис. 9, 10). На первой из них показана одна рамка. В центральной части видны соты, свободные от меда. Видно также, что степень заполнения ячеек медом существенно неравномерна. На второй фотографии изображен вид рамок сверху. Как видно, воздушное межрамочное пространство меняется от рамки к рамке и даже отсутствует, так как пчелы заполняют его медом.

## 5. Выводы

1. Тепловая конвекция существенно влияет на распределение температуры в улье.
2. Необходим учет теплообмена на широких гранях, так как он дает пчеловодам представление о реальных значениях тепловых потоков.
3. Тепловой режим в улье существенным образом зависит от межрамочного расстояния – ширины улочки.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-96040-р\_Урал\_а) и Американского фонда гражданских исследований и развития (грант CRDF PE-009).

## Литература

1. Пчеловодство. – 1993, № 8, 10; – 1995, № 1; – 1996, № 4, 6; – 1997, № 4, 5, 6; – 1998, № 1, 5, 6; – 1999, № 1, 2, 4, 6; – 2000, № 1, 7, 8; – 2005, № 7.
2. *E.L. Tarunin, S.S. Kruglikov*. Thermal convection in beehives // Proceedings. International Conference. Advanced problems in thermal convection. Perm, 24-27 November, 2003. – P.79-83.
3. *Тарунин Е.Л., Гакашев А.И.* Оценки интенсивности тепловой конвекции в пчелиных ульях. // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. Сб. науч. тр./ Перм. ун-т. – Пермь: Перм. ун-т, 2007. – Вып.39. – С. 239-247.
4. Календарь пчеловода: Брошюра / Под ред. Ф.Н. Аликина. – Пермь: Полипринт, 1991. – 92с.
5. *Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий*. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392с.
6. *Е.Л. Тарунин*. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. – Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1990. – 228с.
7. Законы, формулы, задачи физики: Справочник / Под ред. Ю.В.Гофмана. – Киев: Наукова думка, 1977. – 576с.
8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656с.