«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра конструирования и технологии электронно-вычислительных средств

МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания по выполнению лабораторной работы
по дисциплине
«Современные проблемы науки и производства»
направления подготовки магистров 210200.68

Курск 2010

УДК 621.382

Составители: А.В. Кочура

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент *В.В. Умрихин*

Методы условной оптимизации: методические указания по выполнению лабораторной работы по дисциплине «Современные научные проблемы проектирования и технологии электронных средств» / Юго-Зап. гос. ун-т.; сост.: А. В. Кочура, Курск, 2010. 14 с.: ил. 4. Библиогр. с. 14.

Содержатся методические рекомендации для аналитического решения задач оптимизации со смешанными ограничениями.

Указывается порядок выполнения лабораторной работы.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальностям автоматики и электроники (УМО АЭ).

Предназначены для студентов направления подготовки магистров 210200.68.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60× 84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 30 экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель лабораторной работы – закрепление навыков аналитического решения задач оптимизации со смешанными ограничениями с использованием теоремы Куна-Таккера, нахождение седловой точки функции Лагранжа, использование теории двойственности для оценки чувствительности решения задачи оптимизации.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Общая задача нахождения экстремума функции при наличии ограничений - равенств и ограничений – неравенств записывается в следующем виде:

$f(x) \to \text{extr}$, (6)

$x \in X = \{x \in E^n: g_i(x) \leq 0,\ i=1,2,\ldots,r;\ g_i(x) = 0,\ i=r+1,\ \ldots,\ m,\ m\text{-}r<n\}$,

где среди функций $f(x)$ и $g_i(x)$ могут быть нелинейные.

Активные ограничения - неравенства в точке x^* — это ограничения, которые выполняются в данной точке в виде равенства.

Пассивные ограничения - неравенства в точке x^* — это ограничения, которые выполняются в данной точке в виде строгого неравенства.

Если градиенты активных ограничений-неравенств и ограничений-равенств в точке x^* линейно независимы, то говорят, что в оптимальной точке выполнено условие регулярности.

Обобщенная функция Лагранжа для задачи со смешанными ограничениями задается как

$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$. (7)

При выполнении условия регулярности $\lambda_0 \neq 0$ и можно положить этот коэффициент равным 1.

Теорема Куна - Таккера (дифференциальная форма необходимого условия минимума). Пусть точка x^* - точка локального минимума в задаче математического программирования (6), функции $f, g_{r+1},\ldots,g_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в точке x, функции $g_1,\ldots,g_r$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x. Тогда существует число λ_0^* и вектор λ^* такие, что выполняются следующие условия:

условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$\text{grad}_x L(x^*,\ \lambda_0^*, \lambda^*) = 0$;

условие нетривиальности:

$\lambda_0^{*\,2} + \lambda^{*\,2} > 0$,т.е. хотя бы один из множителей Лагранжа отличен от нуля;

условие неотрицательности:

$\lambda_0^* \geq 0,\ \lambda_i^* \geq 0,\ i=1,\ \ldots,\ r$,

т.е. множители Лагранжа, соответствующие целевой функции и ограничениям - неравенствам, неотрицательны;

условия дополняющей нежесткости:

$g_i(x^*) = 0$, $i=1, 2, \ldots, r$.

Если при этом выполнено условие регулярности, то для выпуклых функций f, $g_{r+1}, \ldots, g_m$ и линейных функций $g_1, \ldots, g_r$ условия теоремы Куна - Таккера являются одновременно необходимыми и достаточными условиями глобального минимума.

Достаточное условие минимума первого порядка.

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), удовлетворяющая условию стационарности обобщенной функции Лагранжа по x при $\lambda^*_0 \neq 0$, суммарное число активных ограничений-неравенств в точке x^* и ограничений-равенств совпадает с числом переменных n. Если $\lambda^*_j > 0$ для всех активных ограничений $g_j(x)$, то точка x^* - точка условного локального минимума в задаче (6).

Достаточное условие минимума второго порядка.

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), удовлетворяющая условию стационарности обобщенной функции Лагранжа по x при $\lambda^*_0 \neq 0$. Если в этой точке $d^2L(x^*, \lambda^*) > 0$ для всех ненулевых dx таких, что для активных в точке x^* ограничений-неравенств $dg_j(x^*) = 0$, $\lambda^*_j > 0$ и $dg_j(x^*) \leq 0$, $\lambda^*_j = 0$, то точка x^* является точкой локального минимума.

Общая схема решения задачи условной минимизации функции:

Составляется обобщенная функция Лагранжа вида (7).

Выписываются необходимые условия минимума, сформулированные в теореме Куна - Таккера. К этим условиям добавляются ограничения, задающие допустимое множество X. Полученная система алгебраических уравнений и неравенств используется для поиска условно-стационарных (подозрительных на экстремум) точек. Целесообразно проанализировать отдельно случаи $\lambda_0=0$ и $\lambda_0=1$ (или λ_0 - любое положительное число). Однако если выполнено одно из условий регулярности, то вариант $\lambda_0=0$ рассматривать не надо.

В найденных точках проверяется выполнение достаточных условий минимума и проводится анализ на глобальный экстремум.

Чувствительность решения ЗНП.

Множители Лагранжа могут быть использованы для оценивания влияния малых изменений правых частей ограничений на оптимальное решение задачи нелинейного программирования. Пусть $x^* = x^*(b)$ - решение ЗНП

$f(x) \to \min$, (8)

$x \in X = \{x \in E^n: g_i(x) \leq b_i, i=1,2,\ldots, m; x \geq 0\}$

при некотором векторе b свободных членов в ограничениях - неравенствах, а $v(b)$ соответственно значение целевой функции при этом решении ЗНП, т.е. $v(b) = f(x^*)$. Тогда справедлива следующая оценка изменения целевой функции: $\Delta v = f(b+\Delta b) - f(b)$ при изменении вектора b на некоторый малый вектор-приращение Δb:

$\Delta f \approx (\Delta b, \lambda^*)$, (9)

где λ^* - вектор множителей Лагранжа, соответствующий решению $x^*(b)$.

Седловые точки функции Лагранжа

Существование экстремума тесно связано с наличием у функции Лагранжа (6) так называемой седловой точки.

Рассматривается задача выпуклого программирования с ограничениями-неравенствами

$f(x) \to \min$, (10)

$x \in X = \{x \in E^n: g_i(x) \le 0, i=1,2,\ldots, m; x \ge 0\}$.

Предполагается, что выполнено условие регулярности, т.е. можно рассматривать только вариант $\lambda_0=1$.

Определение. Точка (x^*, λ^*), где $x^* \in X$, $\lambda^* \in E^m$, $\lambda^* \ge 0$, называется седловой точкой функции Лагранжа $L(x,\lambda)$, если

$L(x^*,\lambda) \le L(x^*, \lambda^*) \le L(x, \lambda^*)$. (11)

Утверждение 1 (критерий для седловой точки функции Лагранжа). Точка (x^*, λ^*) - является седловой для функции Лагранжа $L(x,\lambda)$ в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:

$L(x^*, \lambda^*) = \min \{L(x, \lambda^*) \mid x \in X\}$, (12)

$L(x^*, \lambda^*) = \max \{L(x^*,\lambda) \mid \lambda \ge 0\}$, (13)

$\lambda^*_i g_i(x^*) = 0, i=1, 2,..., m$, (14)

$x^* \ge 0, \lambda^* \ge 0$.

Условие (12) минимума функции Лагранжа по x эквивалентно выполнению в точке (x^*, λ^*) неравенства

$\frac{\partial L}{\partial x} \ge 0$. (12′)

Условие (13) максимума функции Лагранжа по λ эквивалентно выполнению в точке (x^*, λ^*) неравенства

$\frac{\partial L}{\partial x} \le 0$. (13′)

Утверждение 2. x^* - оптимальное решение задачи (3) в том и только в том случае, когда существует такой вектор $\lambda^* \ge 0$, что (x^*, λ^*) - седловая точка функции Лагранжа $L(x,\lambda)$.

Решение задач квадратичного программирования методом седловой точки

Рассмотрим задачу квадратичного программирования, т.е.

$f(x) = (Cx,x) + (d,x) \to \min$, (15), $g(x) = Ax \le b$,

где C - матрица размера $n*n$; d, x - векторы-столбцы $n*1$; A - матрица размера $m*n$; b - вектор-столбец $m*1$. Для задачи квадратичного программирования критерий существования седловой точки приобретает вид задачи решения СЛАУ. Действительно, функция Лагранжа в этом случае запишется в виде

$L = \sum_{k=1}^{n} d_k x_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{kj} x_k x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right)$, (16) где c_{kj} - элементы матрицы C; d_k - элементы вектора d; b_i - элементы вектора свободных членов b; a_{ij} - элементы матрицы A; λ_i - коэффициенты Лагранжа. Необходимые и достаточные условия оптимальности решения x^* принимают вид

$$v_j \equiv d_j + 2\sum_{k=1}^{n} c_{kj}x_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij},\ v_j \geq 0,\ (j=1,\ldots,n),\ (17)$$

$$y_i \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i,\ -y_i \leq 0,\ (i=1,...,m),\ (18)$$

$x_j v_j = 0$, $x_j \geq 0$, $(j=1,...,n)$, (19)

$\lambda_i\,(-y_i) = 0$, $\lambda_i \geq 0$. (20)

Равенства (17), (18) образуют систему $n+m$ линейных уравнений с 2 $(n+m)$ неизвестными $x_1,\ldots,x_n, v_1,\ldots,v_n, \lambda_1,\ldots, \lambda_m, y_1,\ldots y_m$. Решения этой системы, при которых выполняются равенства (19), (20), дают координаты седловой точки (x^*,λ^*). Соответственно n координат x^* дают оптимальное решение задачи (15).

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Построить допустимую область задачи и линии уровня.

Записать функцию Лагранжа и необходимые условия экстремума, из которых аналитически или используя прикладные пакеты найти условно-стационарные точки.

Для каждой точки указать активные и пассивные ограничения. Проверить выполнение достаточных условий экстремума в найденных стационарных точках. Найти глобальный минимум функции. Используя критерий (утверждение 1), проверить, что найденная точка является седловой точкой функции Лагранжа.

Проверить справедливость оценки (9), решив задачу при положительных и отрицательных малых значениях приращения Δb.

Решить задачу квадратичного программирования методом седловой точки. Для этого записать систему (17) - (18), найти ее решения, удовлетворяющие условиям (19) - (20).

Пример выполнения лабораторной работы

Минимизировать нелинейную функцию $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$ при условиях $x_1 + x_2 + x_3 \leq 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$, применяя метод функции Лагранжа. Проверить справедливость оценки изменения целевой функции (9).

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 \to \min\ ; \quad \begin{array}{l} g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \leq 0; \\ g_2(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0; \end{array}$$

$$L(x_1,x_2,x_3,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) = \lambda_0 x_1x_2x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3) + \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$$

Допустимая область - часть сферы $\|x\| = 1$, лежащая в подпространстве

$\langle x, a\rangle \le 0$, a= (1, 1,1).

$$\begin{cases} \lambda_0 x_2 x_3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0; & (21)\\ \lambda_0 x_1 x_3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0; & (22)\\ \lambda_0 x_1 x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_3 = 0; & (23)\\ \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0; & (24)\\ \lambda_0 \ge 0, \quad \lambda_1 \ge 0; & (25)\\ \lambda_1 (x_1 + x_2 + x_3) = 0; & (26)\\ x_1 + x_2 + x_3 \le 0; & (27)\\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0. & (28) \end{cases}$$

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$. Если при этом $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_2 \ne 0$.

Из (21) - (23) $\to x_1 = x_2 = x_3 = 0$, что противоречит (28).

Если $\lambda_1 > 0$, то $\lambda_2 \ne 0$ (иначе получаем противоречия в (21) - (23)).

Из (21) - (23) $\to x_1 = x_2 = x_3 = -\dfrac{\lambda_1}{2\lambda_2}$. Подставим в (26): $-\dfrac{3\lambda_1^2}{2\lambda_2} = 0$.

Отсюда $\lambda_1 = 0$, что противоречит исходному предположению $\lambda_1 > 0$.

Рассмотрим теперь случай $\lambda_0 = 1$.

$$\begin{cases} x_2 x_3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0;\\ x_1 x_3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0;\\ x_2 x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_3 = 0;\\ \lambda_1 \ge 0;\\ \lambda_1 (x_1 + x_2 + x_3) = 0;\\ x_1 + x_2 + x_3 \le 0;\\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то получаем точку $x_{(1)}^* = (-1; 0; 0)$ (из $(1') \ldots (3')$, $(7')$).

Остальные "симметричные" точки здесь и далее приводить не будем.

Если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$, $x_1 x_2 x_3 \ne 0$, то

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2},$$

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_3},$$

$$x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = \frac{1}{3}.$$

Далее получаем точки

$x_{(2)}^* = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1; -1; -1)$ и $x_{(3)}^* = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1; -1; -1)$. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\dfrac{x_2 x_3}{2x_1}$.

Для $x_{(2)}^*$ значение

$\lambda_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, для $x^*_{(3)}$ значение $\lambda_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

$$\begin{cases} x_2x_3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0; \\ x_1x_3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0; \\ x_1x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \neq 0$, то

Если $x_1 = 0$, то

$x_2 = x_3 = -\dfrac{\lambda_1}{2\lambda_2}$ и $x_2 = -x_3$.

Следовательно, $x_2 = x_3 = 0$ и $\lambda_1 = 0$. Однако, $\lambda_1 > 0$, значит, пришли к противоречию.

Таким образом, $x_1x_2x_3 \neq 0$.

Суммирование первых трех уравнений дает уравнение

$x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x_1 + x_2 + x_3) = 0$,

в котором последнее слагаемое равно нулю, поэтому

$x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = -3\lambda_1$.

С другой стороны,

$0 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + 2(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)$ и $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1$.

Следовательно, $x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = -3\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$,

откуда $\lambda_1 = \dfrac{1}{6}$. Если $\lambda_2 = 0$, то $x_2x_3 = x_1x_3 = x_1x_2 = -\lambda_1 = -\dfrac{1}{6}$.

Разделим равенства на x_3: $x_2 = x_1 = \dfrac{x_1x_2}{x_3}$. Однако, если $x_1 = x_2$, то их

произведение не может быть равно $-\dfrac{1}{6}$. Значит, $\lambda_2 \neq 0$. Если $x_1 = x_2$,

получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x_1x_3 + 2\lambda_2 x_1 + \dfrac{1}{6} = 0; \\ x_1^2 + 2\lambda_2 x_3 + \dfrac{1}{6} = 0; \\ 2x_1 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2x_1,\ x_3^2 = 4x_1^2; \\ 2x_1^2 + x_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow \quad 6x_1^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ x_3 = \mp\dfrac{2}{\sqrt{6}} = \mp\sqrt{\dfrac{2}{3}}; \end{cases}$$

$$\lambda_2=-\frac{x_1x_3+\frac{1}{6}}{2x_1}=-\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\pm\frac{\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\pm\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Получаем точку

$$x^*_{(4)}=\left(\mp\sqrt{\frac{2}{3}};\pm\frac{1}{\sqrt{6}};\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

(в силу симметрии переменных x_1, x_2, x_3 координаты можно переставить),

$$\lambda_1=\frac{1}{6},\ \lambda_2=\pm\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Предположив $x_1\neq x_2$, получим те же результаты.

Найдены следующие точки:

$x^*_{(1)}=(-1;0;0)$, $\lambda_0=1$, $\lambda_1=\lambda_2=0$;

$x^*_{(2)}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1;-1;-1)$, $\lambda_0=1$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$;

$x^*_{(3)}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1;-1;-1)$, $\lambda_0=1$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}$;

$x^*_{(4)}=\left(\mp\sqrt{\frac{2}{3}};\pm\frac{1}{\sqrt{6}};\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\lambda_0=1$, $\lambda_1=\frac{1}{6}$, $\lambda_2=\pm\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Запишем второй дифференциал обобщенной функции Лагранжа.

$$d^2L=\frac{\partial^2L}{\partial x_1^2}dx_1^2+\frac{\partial^2L}{\partial x_2^2}dx_2^2+\frac{\partial^2L}{\partial x_3^2}dx_3^2+2\frac{\partial^2L}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+2\frac{\partial^2L}{\partial x_1\partial x_3}dx_1dx_3+2\frac{\partial^2L}{\partial x_2\partial x_3}dx_2dx_3;$$

$$\frac{\partial^2L}{\partial x_1^2}dx_1^2=\frac{\partial^2L}{\partial x_2^2}dx_2^2=\frac{\partial^2L}{\partial x_3^2}dx_3^2=2\lambda_2;$$

$$\frac{\partial^2L}{\partial x_1\partial x_2}=\lambda_0x_3,\ \frac{\partial^2L}{\partial x_1\partial x_3}=\lambda_0x_2,\ \frac{\partial^2L}{\partial x_2\partial x_3}=\lambda_0x_1;$$

$$d^2L=2\lambda_2(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+2\lambda_0(x_1dx_2dx_3+x_2dx_1dx_3+x_3dx_1dx_2).$$

$g_1(x_1,x_2,x_3)$

является активным ограничением только для точки $x^*_{(4)}$.

Применим достаточное условие минимума второго порядка к этой точке:

$dg_1=dx_1+dx_2+dx_3;$

$dg_1=0,\lambda_1>0;$

$dx_3=-(dx_1+dx_2).$

Подставив dx_3 и $\lambda_0=1$ во второй дифференциал функции Лагранжа, получим

$$d^2L=2(2\lambda_2-x_2)dx_1^2+2(2\lambda_2-x_1)dx_2^2+2(2\lambda_2-x_1-x_2+x_3)dx_1dx_2.$$

Запишем матрицу квадратичной формы относительно приращений:

$$A_L = \begin{pmatrix} 2(2\lambda_2 - x_2) & 2\lambda_2 - x_1 - x_2 + x_3 \\ 2\lambda_2 - x_1 - x_2 + x_3 & 2(2\lambda_2 - x_1) \end{pmatrix}.$$

Для "верхнего" знака $x^*_{(4)}$ матрица

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & 1.224745 \\ 1.224745 & 2.44949 \end{pmatrix}.$$

Для "нижнего" знака элементы матрицы меняют знак. Согласно критерию Сильвестра, в этой точке нет экстремума.

Сравним значения функции в остальных точках:

$$f(x^*_{(1)}) = 0;\ f(x^*_{(2)}) = \frac{1}{3\sqrt{3}};\ f(x^*_{(3)}) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Точкой глобального минимума является

$$x^*_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1; -1; -1),$$

значение функции в этой точке

$$f(x^*_{(3)}) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \approx \text{-0, 192450.}\ \lambda^* = \left(1; 0; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Проверим справедливость оценки $\Delta f \approx \langle \Delta b, \lambda^* \rangle$ для точки $x^*_{(3)}$, $b = (0; 1)$.

Возьмем вектор $\Delta b = (\delta_1, \delta_2)$, ему соответствуют множители Лагранжа

$$\lambda = \left(0; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Следовательно,

$$\Delta f \approx \frac{\delta_2}{2\sqrt{3}}.$$

Перепишем условие задачи, введя приращение Δb:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \to \min$;

$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \le \delta_1;$

$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 + \delta_2;$

$$L(x_1,x_2,x_3,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_0 x_1 x_2 x_3+\lambda_1(x_1+x_2+x_3-\delta_1)+\lambda_2(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1-\delta_2).$$

$$\begin{cases} x_2 x_3+\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1=0; \\ x_1 x_3+\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_2=0; \\ x_1 x_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_3=0; \\ x_1+x_2+x_3\le\delta_1; \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1+\delta_2. \end{cases}$$

Из первых трех уравнений получаем $x_1^2=x_2^2=x_3^2$ и подставим в последнее уравнение:

$3x_1^2=1+\delta_2,\ \delta_2\ge -1.$

$$x_i=-\sqrt{\frac{1+\delta_2}{3}},\quad i=\overline{1,3}.$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=-\sqrt{\left(\frac{1+\delta_2}{3}\right)^3}.$$

Возьмем, например, $\Delta b=(2;\,0{,}1)$.

$$|\Delta f|=\left|-\sqrt{\left(\frac{1+0{,}1}{3}\right)^3}-f(x^*_{(3)})\right|\approx 0{,}030.$$

С другой стороны,

$$\Delta f\approx\langle\Delta b,\lambda^*\rangle=\frac{0.1}{2\sqrt{3}}=0{,}029.$$

Аналогично для $\Delta b=(2;-0{,}1)$

$$|\Delta f|=\left|-\sqrt{\left(\frac{1-0.1}{3}\right)^3}-f(x^*_{(3)})\right|\approx 0{,}028 \text{ и } |\Delta f|\approx|\langle\Delta b,\lambda^*\rangle|=\left|\frac{-0.1}{2\sqrt{3}}\right|=0{,}029.$$

Решить задачу максимизации квадратичной функции $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ при условиях $x_1+x_2+x_3\le 15$ и $-x_i\le 0,\quad i=1,2,3.$

Перепишем условие следующим образом:

$f1(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2\to\min;$

$x_1+x_2+x_3-15\le 0;$

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3}.$

Функция Лагранжа имеет вид

$L(x_1,x_2,x_3,\lambda_1)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2+\lambda_1(x_1+x_2+x_3-15).$

Необходимые и достаточные условия минимума:

$$v_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} \geq 0, x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\; x_i \geq 0,$$

$$-y_i = \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \leq 0, \lambda_i(-y_i) = 0, \lambda_i \geq 0.$$

Получаем систему уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} v_1 = -2x_1 + \lambda_1 \geq 0; \\ v_2 = -2x_2 + \lambda_1 \geq 0; \\ v_3 = -2x_3 + \lambda_1 \geq 0; \\ -y_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 15 \leq 0; \\ \lambda_1(-y_1) = 0; \\ \begin{cases} x_1 v_1 = 0; \\ x_2 v_2 = 0 \\ x_3 v_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \Phi = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}; \\ \lambda_1 \geq 0. \end{cases}$$

Для решения промежуточной задачи ЛП воспользуемся средствами MS Excel. Введем формулы, соответствующие системе (рис.1), и начальное приближение для решения системы уравнений (рис.2).

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	x3	λ1	
2		3	0	0	20	
3						
4		v1=	=-2*B2+E2		-y1=	=B2+C2+D2-15
5		v2=	=-2*C2+E2		λ1*(-y1)=	=E2*F4
6		v3=	=-2*D2+E2			
7		x1*v1=	=B2*C4			
8		x2*v2=	=C2*C5			
9		x3*v3=	=D2*C6			
10						
11		Φ=	=B2*C4+C2*C5+D2*C6			

Рис.1. Ввод данных задачи

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	x3	λ1	
2		3	0	0	20	
3						
4		v1=	14		-y1=	-12
5		v2=	20		λ1*(-y1)=	-240
6		v3=	20			
7		x1*v1=	42			
8		x2*v2=	0			
9		x3*v3=	0			
10						
11		Φ=	42			

Рис.2. Задание начального приближения

Заполним поля диалога "Поиск решения" (рис.3).

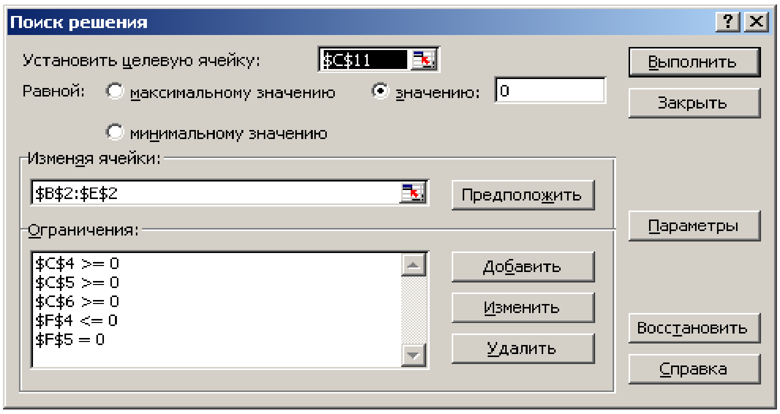

Рис.3. Экранная форма "Поиск решения"

В окне "Параметры" установим флажок "Неотрицательные значения". В результате решения найдена седловая точка функции Лагранжа $(x^*,\lambda^*) = (15;\ 0;\ 0;\ 30)$ (рис.4).

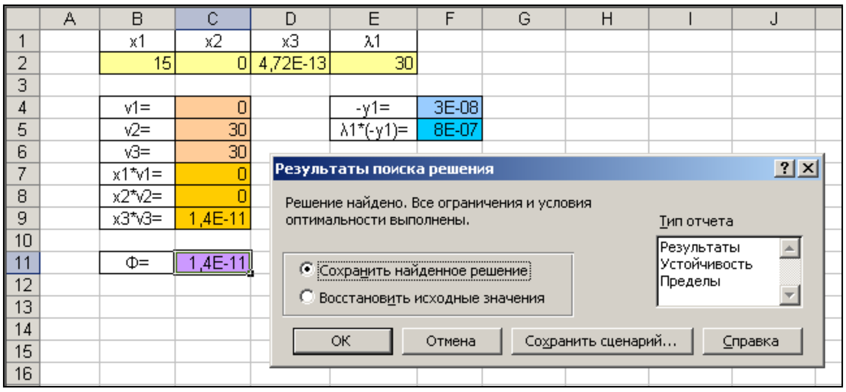

Рис.4. Результаты поиска решения.

Оптимальное решение задачи: $x^*\ (15;\ 0;\ 0)$, $f(x^*) = 225$.

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Решить задачу минимизации функции методом множителей Лагранжа.

Решить ЗНП методом седловой точки. Промежуточную задачу решения СЛАУ решить, используя EXCEL (задание выдается преподавателем).

1. $F_1(\bar{x}) = (x_1 - 4)^2 + 100{x_2}^2$.
2. $F_2(\bar{x}) = 100{x_1}^2 + (x_2 - 3)^2$.
3. $F_3(\bar{x}) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2$.
4. $F_4(\bar{x}) = 100(x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2$.
5. $F_5(\bar{x}) = (x_1 - 100)^2 + (x_2 - 10)^2$.
6. $F_6(\bar{x}) = (x_1 - 10)^2 + 100(x_2 - 10)^2$.
7. $F_7(\bar{x}) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 + 10)^2$.

8. $F_8(\bar{x}) = 5(x_1 - 5)^2 + (100x_2 - 1)^2$.

Ограничения (для всех вариантов):

$$\begin{matrix} -x_1 + 3x_2 \le 12,\ 2x_1 + 5x_2 \le 30,\ 3x_1 + 2x_2 \le 22, \\ x_1 - 3x_2 \le 0,\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10,\ 5x_1 + x_2 \ge 5, \end{matrix} \quad \bar{x} \ge 0.$$

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое активные и пассивные ограничения?
2. Что называют регулярной задачей?
3. Дайте определение теоремы Куна-Такера.
4. Каковы достаточные условия минимума в задачах математического программирования?
5. Что такое седловая точка и как реализовать ее поиск?.
6. В чем заключается метод седловой точки для задачи квадратичного программирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Методы оптимизации функций многих переменных. Лабораторный практикум. Екатеринбург 2007, 42 с.